

УДК 517.538.52+517.538.53

## АСИМПТОТИКА КВАДРАТИЧНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

## ASYMPTOTICS OF QUADRATIC HERMITE – PADÉ APPROXIMANTS OF THE EXPONENTIAL FUNCTIONS

A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В работе изучаются асимптотические свойства квадратичных диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде I типа для системы экспонент  $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=0}^2$  с произвольными различными действительными показателями  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ . Доказанные теоремы дополняют известные результаты П. Борвейна и Ф. Вилонского.

**Ключевые слова:** аппроксимации Эрмита – Паде I типа, квадратичные аппроксимации Эрмита – Паде, асимптотические равенства, метод перевала.

The paper deals with asymptotic properties of diagonal quadratic Hermite – Padé approximants of type I for exponential system  $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=0}^2$  with arbitrary real  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ . The proved theorems complement the known results of P. Borwein, F. Wielonsky.

**Keywords:** Hermite – Padé approximants of type I, quadratic and Hermite – Padé approximants, asymptotic equality, saddle-point method.

### Введение

Будем рассматривать два типа диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде экспоненциальных функций (по поводу терминологии см. [1]). Один из этих типов (German type – тип II) состоит из совместных рациональных аппроксимаций  $\pi_{kn, kn}^j(z; e^{jz}) = P_{kn}^j(z) / Q_{kn}(z)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  набора экспонент  $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$ , где многочлены  $P_{kn}^j$ ,  $Q_{kn}$  имеют степень не выше  $kn$  и определяются из условий

$$Q_{kn}(z)e^{jz} - P_{kn}^j(z) = O(z^{kn+n+1}), z \rightarrow 0. \quad (0.1)$$

Впервые такие конструкции рациональных дробей рассматривал Ш. Эрмит (1873 г.) в связи с доказательством трансцендентности числа  $e$  [2], [3]. При доказательстве трансцендентности числа  $\pi$  Линдемман (1882 г.) использовал аналоги дробей Эрмита, построенные уже для системы экспонент  $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ , где  $\lambda_j$  – различные алгебраические числа (см. [3]).

Позже (1883 г.) Эрмит [4] ввёл другой тип аппроксимаций (Latin type – тип I). Для набора функций  $\{e^{jz}\}_{j=0}^k$  эти аппроксимации совпадают с многочленами  $A_0(z), A_1(z), \dots, A_k(z)$  степени не выше  $n-1$ , для которых

$$\sum_{p=0}^k A_p(z)e^{pz} = O(z^{kn+n-1}), z \rightarrow 0. \quad (0.2)$$

Предполагается, что хотя бы один из многочленов  $A_p(z)$  тождественно не равен нулю. К. Малером [5] было показано, что с помощью этого типа аппроксимаций также можно доказать трансцендентность числа  $e$ .

В одномерном случае ( $k=1$ ) общая постановка задачи о нахождении полиномов, удовлетворяющих равенствам (0.1), (0.2) принадлежит Паде [6], а построенные два типа полиномов совпадают. В многомерном случае ( $k \geq 2$ ) систематическое изучение аппроксимаций Эрмита – Паде I и II типов связано с появлением работ К. Малера [1], [5] (об участии других авторов в создании формальной теории см. обзоры [7], [8]). Оба типа аппроксимаций Эрмита – Паде, явно различные в многомерном случае, имеют множество применений в теории чисел, в частности, для измерения иррациональности [9], в доказательствах трансцендентности [10] и в исследованиях алгебраической природы математических констант, например, значений дзета функции Римана в натуральных точках, постоянной Эйлера [11] (о других приложениях см. [12], [8], [13]). Как уже было сказано ранее, при  $k=1$  мы приходим к классическим аппроксимациям Паде. В этом случае теорема Паде утверждает, что для полиномов  $A_0(z) = -P_{n-1}^1(z)$ ,  $A_1(z) = Q_{n-1}(z)$ , нормированных так, что  $A_1(0) = 1$ , при  $n \rightarrow \infty$  локально равномерно по  $z \in \mathbb{C}$ , т. е. на любом

компакте в  $\mathbb{C}$ , справедливы асимптотические равенства

$$A_0(z) = -e^{z/2} (1 + O(1/n)),$$

$$A_1(z) = e^{z/2} (1 + O(1/n)).$$

С помощью явных формул П. Борвейн [14] нашёл асимптотику квадратичных ( $k = 2$ ) аппроксимаций Эрмита – Паде I типа. Этот результат был обобщён Ф. Вилонским [15] на случай произвольного  $k$ . Равномерная сходимость аппроксимаций Эрмита – Паде II типа  $\pi_{kn, kn}^j(z; e^{j\xi})$  к  $e^{jz}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  на компактах в  $\mathbb{C}$  была доказана А.И. Аптекаревым [16]. Им же установлена равномерная сходимость аппроксимаций Эрмита – Паде II типа, построенных для системы экспонент  $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ , где  $\lambda_j$  – произвольные отличные от нуля комплексные числа. В работах автора [17], [18] найдена асимптотика таких аппроксимаций соответственно для систем  $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$  и  $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ , где  $\lambda_j$  – произвольные отличные от нуля действительные числа.

Целью данной статьи является обобщение результатов П. Борвейна о квадратичных диагональных аппроксимациях I типа на системы экспонент  $\{e^{\lambda_0 z}, e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$  с произвольными различными действительными показателями  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ . Такое обобщение получено в результате исследования асимптотических свойств интегральных представлений многочленов  $\{A_n^j(z)\}_{j=0}^2$ ,  $\deg A_n^j \leq n-1$ , удовлетворяющих условиям:

$$\sum_{p=0}^2 A_n^p(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{3n-1}), z \rightarrow 0. \quad (0.3)$$

При исследовании применяются эффективные для такого анализа методы Лапласа и перевала. Технология их применения является результатом синтеза методов доказательства основных результатов в работах [15], [17] и может быть использована для изучения асимптотических свойств аппроксимаций Эрмита – Паде I рода для систем  $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$  при произвольных действительных  $\lambda_j$  и  $k > 2$ .

Без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ . Общий случай сводится к рассматриваемому. Для этого достаточно равенство (0.3) умножить на  $e^{-\lambda^* z}$ , где  $\lambda^* = \min\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ .

### 1 Предварительные результаты

Полиномы  $A_n^0(z)$ ,  $A_n^1(z)$ ,  $A_n^2(z)$ , удовлетворяющие равенствам (0.3), могут быть получены решением линейной системы  $3n-1$  однородных уравнений с  $3n$  неизвестными коэффициентами.

Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть  $C_p$  – граница круга с центром в точке  $\lambda_p$  столь малого радиуса, что все остальные  $\lambda_j$  лежат во внешности этого круга. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{ed\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, 0 \leq p \leq 2, \quad (1.1)$$

где  $\varphi(\xi) = \xi(\xi - \lambda_1)(\xi - \lambda_2)$ , удовлетворяют (0.3) и всем другим условиям.

Далее при изучении асимптотики полиномов (1.1) будем использовать известные методы комплексного анализа. Приведем без доказательства в удобном для нас виде необходимые утверждения [19, с. 398, с. 415].

**Утверждение 1.1 (Метод Лапласа).** Пусть  $f(x)$ ,  $S(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  функции, при этом  $S(x)$  принимает только действительные значения, а  $f(x)$  может быть комплекснозначной. Полагаем

$$I_n = \int_a^b f(x) e^{nS(x)} dx.$$

Предполагаем, что  $S(x)$  в точке  $x_0 \in (a, b)$  имеет абсолютный максимум на отрезке  $[a, b]$ , т. е.  $S(x) < S(x_0)$ ,  $x \neq x_0$ ,  $S''(x_0) \neq 0$ , и функции  $f(x)$ ,  $S(x)$  бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Тогда при  $n \rightarrow +\infty$  справедливо асимптотическое равенство

$$I_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}} e^{nS(x_0)} \{f(x_0) + O(1/n)\}. \quad (1.2)$$

**Утверждение 1.2 (Метод перевала).** Пусть функции  $f(z)$  и  $S(z)$  регулярны в некоторой односвязной области  $G$ , содержащей кусочно гладкую кривую  $\gamma$  и

$$F_n = \int_{\gamma} f(\xi) e^{nS(\xi)} d\xi.$$

Предположим, что  $\max_{\xi \in \gamma} \operatorname{Re} S(\xi)$  достигается только в точке  $z_0$ , которая является внутренней точкой контура и простой точкой перевала, т. е.  $S'(z_0) = 0$ ,  $S''(z_0) \neq 0$ . Считаем также, что в окрестности  $z_0$  контур  $\gamma$  проходит через оба сектора [19, с. 414], в которых  $\operatorname{Re} S(\xi) < \operatorname{Re} S(z_0)$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$F_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}} e^{nS(z_0)} \{f(z_0) + O(1/n)\}. \quad (1.3)$$

Выбор ветви корня в (1.3) определяется из условий

$$\arg \sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}} = \varphi_0,$$

где  $\varphi_0$  – угол между касательной к кривой  $l$  в точке  $z_0$  и положительным направлением действительной оси, а  $l$  – линия наискорейшего спуска, проходящая через точку  $z_0$ , т. е. для  $l$  в окрестности  $z_0$  выполняются условия:  $ImS(z) = ImS(z_0)$  при  $z \in l$ ,  $ReS(z) < ReS(z_0)$  при  $z \in l$ ,  $z \neq z_0$ .

**2 Асимптотика квадратичных аппроксимаций Эрмита – Паде**

Перейдём непосредственно к изучению асимптотики полиномов  $A_n^p$ ,  $0 \leq p \leq 2$ . С этой целью введём необходимые обозначения. Пусть  $x_i$ ,  $i = 1, 2$  нули функции  $\varphi'(\xi)$ , т. е.  $\varphi'(x_i) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Ясно, что  $x_i$  – действительные числа и  $x_1 \in (0, \lambda_1)$ ,  $x_2 \in (\lambda_1, \lambda_2)$ . При  $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_j\}_{j=0}^2$  рассмотрим однозначную функцию (главную ветвь логарифма)

$$S(\xi) = -\ln \varphi(\xi) = -\ln |\varphi(\xi)| - i \arg_0 \varphi(\xi),$$

где  $\arg_0 \varphi(\xi) \in (-\pi, \pi]$ . В области её определения справедливы равенства

$$S'(\xi) = -\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)} = -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{(\xi - \lambda_1)} - \frac{1}{(\xi - \lambda_2)},$$

$$S''(\xi) = -\frac{\varphi''(\xi)\varphi(\xi) - [\varphi'(\xi)]^2}{\varphi^2(\xi)} =$$

$$= \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi - \lambda_1)^2} + \frac{1}{(\xi - \lambda_2)^2},$$

из которых следует, что  $S'(x_j) = 0$ ,

$$S''(x_j) = -\varphi''(x_j) / \varphi(x_j) > 0, \quad j = 1, 2.$$

**Теорема 2.1.** При  $n \rightarrow \infty$  локально равномерно по  $z$

$$A_n^0(z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{x_1 z} (1 + O(1/n)), \quad (2.1)$$

$$A_n^1(z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_2)}} e^{nS(x_2)} e^{(x_2 - \lambda_1)z} (1 + O(1/n)) -$$

$$- \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{(x_1 - \lambda_1)z} (1 + O(1/n)), \quad (2.2)$$

$$A_n^2(z) = -\sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_2)}} e^{nS(x_2)} e^{(x_2 - \lambda_2)z} (1 + O(1/n)). \quad (2.3)$$

**Доказательство.** Исходя из интегрального представления

$$A_n^0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} e^{\xi z} e^{nS(\xi)} d\xi, \quad (2.4)$$

докажем равенство (2.1) для каждого фиксированного  $z \in \mathbb{C}$ . Для этого в интеграле (2.4) деформируем контур интегрирования  $C_0$  в

прямоугольник  $R$ , принадлежащий области  $\{z: -\infty < Re z < \lambda_1\}$ , с вершинами в точках  $A(-a', -r)$ ,  $B(-a', r)$ ,  $C(a, r)$ ,  $D(a, -r)$ , где  $r$  – достаточно большое положительное число,  $a \in (0, \lambda_1)$ ,  $a' > 0$ . Тогда на вертикальном отрезке, соединяющем точки  $A$  и  $B$ , максимум функции  $ReS(\xi)$  достигается в единственной точке  $-a'$ . Аналогично на вертикальном отрезке, соединяющем точки  $C$  и  $D$ , максимум этой функции достигается в единственной точке  $a$ . На оставшихся двух горизонтальных отрезках при достаточно большом  $r$  значения  $ReS(\xi)$  меньше каждого из значений  $ReS(\xi)$  в точках  $-a'$  и  $a$ . Действительно, пусть, например,  $\xi \in [B, C]$ , т. е.  $\xi = t + ir$ ,  $t \in [-a', a]$ . Тогда

$$|\varphi(\xi)| = \sqrt{(t^2 + r^2)((t - \lambda_1)^2 + r^2)((t - \lambda_2)^2 + r^2)} >$$

$$> \min\{|\varphi(-a')|, |\varphi(a)|\},$$

если только  $r > 2 \max\{a', \lambda_2\}$ . Отсюда и определения  $S(\xi)$  следует, что для всех  $\xi \in [B, C]$   $ReS(\xi) < \min\{ReS(-a'), ReS(a)\}$ . Определимся теперь с выбором  $a'$  и  $a$ . Положим  $a = x_1$ , а  $a'$  возьмём таким, чтобы  $ReS(-a') < ReS(x_1)$ . Такой выбор возможен, так как  $\ln |\varphi(t)|^{-1} \rightarrow -\infty$  при  $t \in \mathbb{R}$  и  $t \rightarrow -\infty$ .

Считаем положительным направление обхода произвольного отрезка  $[L, N]$  направление от  $L$  к  $N$  и полагаем

$$F_n^{[L, N]}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{[L, N]} e^{\xi z} e^{nS(\xi)} d\xi.$$

Применим метод перевала (утверждение 1.2) к интегралу  $F_n^{[D, C]}(z)$ . Тогда

$$F_n^{[D, C]}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{x_1 z} (1 + O(1/n)). \quad (2.5)$$

Выбираем ветвь корня в (2.5) с учётом того, что в рассматриваемом случае угол  $\varphi_0 = \pi/2$ . Тогда окончательно получим, что при  $n \rightarrow \infty$

$$F_n^{[D, C]}(z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{x_1 z} (1 + O(1/n)). \quad (2.6)$$

Применяя к интегралу  $F_n^{[B, A]}(z)$  утверждение 1.2 и учитывая выбор точки  $-a'$ , нетрудно показать, что локально равномерно по  $z$

$$|F_n^{[B, A]}(z)| \leq \theta |e^{n(S(x_1) - \delta)}|,$$

где  $\theta$  и  $\delta$  – положительные постоянные. Это значит, что при  $n \rightarrow \infty$  интеграл  $F_n^{[B, A]}(z)$  экспоненциально мал по сравнению с  $e^{nS(x_1)}$ . Это утверждение справедливо и по отношению к интегралам  $F_n^{[C, B]}(z)$ ,  $F_n^{[A, D]}(z)$ . Значит основной

вклад в асимптотику  $A_n^0(z)$  вносит интеграл по отрезку  $[D, C]$ . Поэтому из (2.6) следует справедливость равенства (2.1) для любого фиксированного  $z \in \mathbb{C}$ .

Равенство (2.3) доказывается аналогично, с той лишь разницей, что при применении метода перевала к соответствующему интегралу ветвь корня выбирается с учётом того, что угол  $\varphi_0 = -\pi/2$ .

Перейдем к доказательству равенства (2.2). Зафиксируем произвольное  $z \in \mathbb{C}$  и представим многочлен  $A_n^1(z)$  в виде

$$A_n^1(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \int_{C_1} e^{\xi z} e^{nS(\xi)} d\xi. \quad (2.7)$$

В интеграле (2.7) деформируем контур интегрирования  $C_1$  в прямоугольник  $R^*$ , принадлежащий области  $\{z: 0 < \operatorname{Re} z < \lambda_2\}$  с вершинами в точках  $A^*(a', -r)$ ,  $B^*(a', r)$ ,  $C^*(a, r)$ ,  $D^*(a, -r)$ , где  $r$  – достаточно большое положительное число,  $a' \in (0, \lambda_1)$ ,  $a \in (\lambda_1, \lambda_2)$ . Тогда на вертикальном отрезке, соединяющем точки  $A^*$  и  $B^*$ , максимум функции  $\operatorname{Re} S(\xi)$  достигается в единственной точке  $a'$ , а на отрезке  $[D^*, C^*]$  он достигается в единственной точке  $a$ . При достаточно большом  $r$  ( $r > 3\lambda_2$ ) значения  $\operatorname{Re} S(\xi)$  на оставшихся двух горизонтальных отрезках  $[B^*, C^*]$  и  $[A^*, D^*]$  меньше каждого из значений  $\operatorname{Re} S(\xi)$  в точках  $a'$  и  $a$ . Если положить  $a' = x_1$ ,  $a = x_2$ , то отсюда следует, что основной вклад в асимптотику  $A_n^1(z)$  будут вносить интегралы по отрезкам  $[A^*, B^*]$  и  $[D^*, C^*]$ . Применяя к ним утверждение 1.2, при  $n \rightarrow \infty$  получим, что

$$F_n^{[D, C]}(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_2)}} e^{nS(x_2)} e^{x_2 z} (1 + O(1/n)). \quad (2.8)$$

$$F_n^{[B, A]}(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{x_1 z} (1 + O(1/n)). \quad (2.9)$$

Заметим, что при выборе ветви корня в (2.8)  $\varphi_0 = \pi/2$ , а при выборе ветви корня в (2.9)  $\varphi_0 = -\pi/2$ . С учётом этого, из (2.8) и (2.9) следует равенство (2.2). Таким образом, для каждого фиксированного  $z$  асимптотические равенства (2.1)–(2.3) доказаны. Справедливость равенств (2.1)–(2.3) равномерно на компактах в  $\mathbb{C}$  будет обоснована при доказательстве теоремы 2.2.

**Следствие 2.1.** При  $n \rightarrow \infty$

$$A_n^0(0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_1)}} e^{nS(x_1)} (1 + O(1/n)),$$

$$A_n^1(0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_2)}} e^{nS(x_2)} (1 + O(1/n)) -$$

$$-\sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_1)}} e^{nS(x_1)} (1 + O(1/n)), \quad (2.10)$$

$$A_n^2(0) = -\sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_2)}} e^{nS(x_2)} (1 + O(1/n)),$$

Из равенств (2.10) следует, что при достаточно больших  $n$   $A_n^0(0) \neq 0$  и  $A_n^2(0) \neq 0$ . При таких  $n$  определим две последовательности нормированных полиномов

$$\tilde{A}_n^0(z) = A_n^0(z) / A_n^0(0),$$

$$\tilde{A}_n^2(z) = A_n^2(z) / A_n^2(0).$$

Выясним, когда  $A_n^1(0) \neq 0$ . Обозначим через  $p = \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2}$ ,  $h = 5\lambda_1 \lambda_2 - 2\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2$ . Тогда несложные вычисления приводят к равенствам

$$x_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 - p) / 3, \quad x_2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + p) / 3,$$

$$\varphi(x_1) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)h + 2p^3}{27}, \quad (2.11)$$

$$\varphi(x_2) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)h - 2p^3}{27},$$

$$S''(x_1) = \ln \frac{54p}{(\lambda_1 + \lambda_2)h + 2p^3},$$

$$S''(x_2) = \ln \frac{-54p}{(\lambda_1 + \lambda_2)h - 2p^3}.$$

Из (2.11) следует, что если  $A_n^1(0) = 0$ , то необходимо чтобы  $h = 0$ , т. е.  $\lambda_2 = 2\lambda_1$ . В этом случае

$$S(x_1) = \ln(27 / p^3),$$

$$S(x_2) = \ln(27 / p^3) + i\pi,$$

$$S''(x_1) = S''(x_2) = 27 / p^2.$$

Поэтому при  $\lambda_2 = 2\lambda_1$  из второго равенства в (2.10) вытекает, что при  $n \rightarrow \infty$

$$A_n^1(0) = \sqrt{\frac{p^2}{54\pi n}} \left[ (-1)^n \left( \frac{27}{p^3} \right)^n (1 + O(1/n)) - \left( \frac{27}{p^3} \right)^n (1 + O(1/n)) \right].$$

Следовательно, при достаточно больших  $n$   $A_{2n+1}^1(0) \neq 0$  и поэтому определена последовательность нормированных многочленов

$$\tilde{A}_{2n+1}^1(z) = A_{2n+1}^1(z) / A_{2n+1}^1(0).$$

Производную многочлена  $A_n^1(z)$  можно представить в виде

$$\frac{dA_n^1}{dz}(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \int_{C_1} (\xi - \lambda_1) e^{\xi z} e^{nS(\xi)} d\xi.$$

Аналогично, как и при нахождении асимптотики  $A_n^1(z)$ , применив к интегралу в правой части последнего равенства при  $z = 0$  метод перевала, получим

$$\frac{dA_n^1}{dz}(0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_2)}} (x_2 - \lambda_1) e^{nS(x_2)} (1 + O(1/n)) - \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_1)}} (x_1 - \lambda_1) e^{nS(x_1)} (1 + O(1/n)).$$

Тогда при  $\lambda_2 = 2\lambda_1$  и  $n \rightarrow \infty$  справедливо равенство

$$\frac{dA_n^1}{dz}(0) = \sqrt{\frac{p^2}{54\pi n}} \left(\frac{27}{p^3}\right)^n (x_2 - x_1) (1 + O(1/n)),$$

из которого следует, что при больших  $n$   $(A_{2n}^1)'(0) \neq 0$ . Поэтому в случае, когда  $\lambda_2 = 2\lambda_1$ , определена последовательность нормированных полиномов  $\tilde{A}_{2n}^1(z) = A_{2n}^1(z) / (A_{2n}^1)'(0)$ .

**Теорема 2.2.** Локально равномерно по  $z$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{A}_n^0(z) \Rightarrow e^{x_1 z}, \quad \tilde{A}_n^2(z) \Rightarrow e^{(x_2 - \lambda_2)z}. \quad (2.12)$$

Если  $\lambda_2 \neq 2\lambda_1$ , то локально равномерно по  $z$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{A}_n^1(z) \Rightarrow e^{(x_2 - \lambda_4)z}, \quad (2.13)$$

а при  $\lambda_2 = 2\lambda_1$  и  $n \rightarrow \infty$  локально равномерно по  $z$

$$\tilde{A}_{2n+1}^1(z) \Rightarrow \frac{1}{2} (e^{(x_2 - \lambda_4)z} + e^{(x_1 - \lambda_4)z}), \quad (2.14)$$

$$\tilde{A}_{2n}^1(z) \Rightarrow \frac{1}{x_2 - x_1} (e^{(x_2 - \lambda_4)z} - e^{(x_1 - \lambda_4)z}). \quad (2.15)$$

*Доказательство.* Поточечная сходимость в (2.12)–(2.15) доказана в теореме 2.1. Остается доказать, что нормированные многочлены  $\tilde{A}_n^0(z)$ ,  $\tilde{A}_n^2(z)$ ,  $\tilde{A}_n^1(z)$ ,  $\tilde{A}_{2n+1}^1(z)$  и  $\tilde{A}_{2n}^1(z)$  равномерно сходятся на компактах в  $\mathbb{C}$  к соответствующим функциям. Докажем это, например, для  $\tilde{A}_n^0(z)$ .

Если предположить, что  $|z| \leq \rho$  и  $\xi \in R$ , то модуль  $e^{\xi z}$  ограничен  $M = e^{4\rho \max\{\lambda_1, \lambda_2\}}$ . Учитывая равенство (2.4), в этом случае получим, что

$$|A_n^0(z)| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} e^{n \operatorname{Re} S(\zeta(t))} |\zeta'(t)| dt$$

при условии, что контур интегрирования  $R$  прежний и параметризуется вещественным параметром  $t \in [\alpha, \beta]$ . Для нахождения асимптотики интеграла в правой части предыдущего неравенства применим метод Лапласа (утверждение 1.1). В результате получим, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{n \operatorname{Re} S(\zeta(t))} |\zeta'(t)| dt = \sqrt{\frac{-2\pi}{n [\operatorname{Re} S(\zeta(t))]'_{t=t_0}}} e^{n \operatorname{Re} S(x_1)} |\zeta'(t_0)| (1 + O(1/n)), \quad (2.16)$$

где  $t_0$  выбрано так, что  $\zeta(t_0) = x_1$ . Из того, что  $t_0$  является точкой максимума функции  $\operatorname{Re} S(\zeta(t))$ , следует

$$[\operatorname{Re} S(\zeta(t))]'_{t=t_0} = S''(x_1) [\zeta'(t_0)]^2 < 0.$$

Отсюда, учитывая (2.10), (2.16), при  $n \geq n_0$  получаем неравенство  $|A_n^0(z)| \leq 2M$ , из которого следует, что последовательность  $\{A_n^0(z)\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно ограничена по модулю в круге  $\{z : |z| \leq \rho\}$ . Тогда по теореме Витали [20, с. 371] эта последовательность равномерно сходится к функции  $e^{x_1 z}$  на любом компакте из круга  $\{z : |z| \leq \rho\}$ . Аналогичные рассуждения применимы и к другим последовательностям из теоремы 2.2. Теорема 2.2 доказана.

Для сравнения переформулируем, с учётом принятых обозначений, аналогичный результат об асимптотике аппроксимаций Эрмита-Паде II рода [18].

**Теорема 2.3.** Пусть  $\pi_{2n,2n}^j(z; e^{\lambda_j z})$ ,  $j = 1, 2$  – аппроксимации Эрмита – Паде II рода для набора  $\{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$ , где  $\lambda_1, \lambda_2$  – различные действительные числа. Тогда локально равномерно по  $z$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 z} - \pi_{2n,2n}^1(z; e^{\lambda_1 z}) = \\ &= \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)z/3} \sqrt{\frac{2\pi}{n S''(x_1)}} e^{-n S(x_1)} e^{(\lambda_1 - x_1)z} (1 + O(1/n)), \\ & e^{\lambda_2 z} - \pi_{2n,2n}^1(z; e^{\lambda_2 z}) = \\ &= \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)z}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{n S''(x_1)}} e^{-n S(x_1)} e^{(\lambda_2 - x_1)z} (1 + O(1/n)) + \right. \\ & \left. + (-1)^n \sqrt{\frac{2\pi}{n S''(x_2)}} e^{-n S(x_2)} e^{(\lambda_2 - x_2)z} (1 + O(1/n)) \right\}. \end{aligned}$$

### 3 Сравнение двух типов аппроксимаций.

#### Примеры

Проиллюстрируем теорему 2.1, рассмотрев конкретные примеры. Кроме этого, сравним полученные результаты с аналогичными утверждениями для аппроксимаций Эрмита – Паде II типа.

Напомним, что две бесконечно большие или две бесконечно малые последовательности  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$  называют эквивалентными ( $\alpha_n \sim \beta_n$ ) при

$$n \rightarrow \infty, \text{ если } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1.$$

Пусть  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \xi(\xi - 1)(\xi - 2), \\ x_1 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ S(x_1) &= \ln(3\sqrt{3}/2), \\ S(x_2) &= \ln(3\sqrt{3}/2) + i\pi, \\ S''(x_1) &= S''(x_2) = 9. \end{aligned}$$

Поэтому из теоремы 2.1 вытекает

**Следствие 3.1.** При  $n \rightarrow \infty$

$$A_n^0(z) \sim \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{(1-1/\sqrt{3})z}, \quad (3.1)$$

$$A_n^1(z) \sim (-1)^n \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^n \left(e^{z/\sqrt{3}} + (-1)^{n-1} e^{-z/\sqrt{3}}\right),$$

$$A_n^2(z) \sim (-1)^{n-1} \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{(-1+1/\sqrt{3})z}.$$

Асимптотические равенства (3.1) согласуются с соответствующими утверждениями из работ [14] и [15]. Их полезно сравнить со следующим следствием теоремы 2.3.

**Следствие 3.2.** Пусть  $\pi_{2n,2n}^j(z; e^{j\xi})$ ,  $j = 1, 2$  – аппроксимации Эрмита – Паде II рода для набора  $\{e^z, e^{2z}\}$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$e^z - \pi_{2n,2n}^1(z; e^\xi) \sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^z \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n e^{z/\sqrt{3}},$$

$$e^{\lambda_2 z} - \pi_{2n,2n}^1(z; e^{\lambda_2 \xi}) \sim$$

$$\sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{2z} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \left(e^{z/\sqrt{3}} + (-1)^n e^{-z/\sqrt{3}}\right).$$

Пусть теперь  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1 + \varepsilon$ . Будем считать, что  $0 < \varepsilon < 1$ . Случай  $\varepsilon = 1$  рассмотрен в следствиях 2.1 и 3.1. Тогда

$$p = \sqrt{1 + \varepsilon + \varepsilon^2} \rightarrow 1, \quad h = 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 \rightarrow 1$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , и

$$\varphi(\xi) = \xi(\xi - 1)(\xi - 1 - \varepsilon),$$

$$x_1 = \frac{2 + \varepsilon - p}{3}, \quad x_2 = \frac{2 + \varepsilon + p}{3},$$

$$S(x_1) = \ln \frac{27}{2p^3 + (2 + \varepsilon)h},$$

$$S(x_2) = \ln \frac{27}{2p^3 - (2 + \varepsilon)h} + i\pi,$$

$$S^n(x_1) = \frac{54p}{2p^3 + (2 + \varepsilon)h}, \quad S^n(x_2) = \frac{54p}{2p^3 - (2 + \varepsilon)h}.$$

В этом случае из теоремы 2.1 вытекает

**Следствие 3.3.** При  $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{A}_n^0(z) \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{2p^3 + (2 + \varepsilon)h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 + (2 + \varepsilon)h}\right)^n e^{\frac{(2+\varepsilon-p)z}{3}},$$

$$\tilde{A}_n^1(z) \sim$$

$$\sim (-1)^n \sqrt{\frac{2p^3 - (2 + \varepsilon)h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 - (2 + \varepsilon)h}\right)^n e^{\frac{(-1+\varepsilon+p)z}{3}}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{A}_n^2(z) \sim$$

$$\sim (-1)^n \sqrt{\frac{2p^3 - (2 + \varepsilon)h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 - (2 + \varepsilon)h}\right)^n e^{\frac{(-1-2\varepsilon+p)z}{3}}.$$

Соответственно, теорема 2.3 в этом случае выглядит следующим образом.

**Следствие 3.4.** Пусть

$$\pi_{2n,2n}^1(z; e^\xi), \quad \pi_{2n,2n}^2(z; e^{(1+\varepsilon)\xi})$$

– аппроксимации Эрмита – Паде II рода для набора  $\{e^z, e^{(1+\varepsilon)z}\}$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & e^z - \pi_{2n,2n}^1(z; e^\xi) \sim \\ & \sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} \sqrt{\frac{\pi(2p^3 + (2 + \varepsilon)h)}{27pn}} \left(\frac{2p^3 + (2 + \varepsilon)h}{27}\right)^n e^{\frac{(3+p)z}{3}}, \\ & e^{(1+\varepsilon)z} - \pi_{2n,2n}^2(z; e^{(1+\varepsilon)\xi}) \sim \\ & \sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} \sqrt{\frac{\pi(2p^3 + (2 + \varepsilon)h)}{27pn}} \times \\ & \times \left(\frac{2p^3 + (2 + \varepsilon)h}{27}\right)^n e^{\frac{(3+3\varepsilon+p)z}{3}}. \end{aligned}$$

Сравним как ведут себя асимптотики соответствующих аппроксимаций для набора функций  $\{e^z, e^{(1+\varepsilon)z}\}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Из равенств (3.2) следует, что главные члены асимптотик полиномов  $\tilde{A}_n^1(z)$  и  $\tilde{A}_n^2(z)$  отличаются на множитель  $e^{\varepsilon z}$ , который локально равномерно стремится к единице. Следствие 3.4 позволяет утверждать, что при малых значениях  $\varepsilon$  асимптотики соответствующих уклонений аппроксимаций Эрмита – Паде II рода отличаются несущественно и с убыванием  $\varepsilon$  к нулю стремятся к общему значению. При этом зависящий от  $\varepsilon$  множитель  $(2p^3 + (2 + \varepsilon)h) / 27^n$ , определяющий поведение главного члена асимптотики, стремится к  $(2 / (3\sqrt{3}))^{2n}$ . Это несколько неожиданно, если принять во внимание первое утверждение следствия 3.2, так как наблюдается эффект существенного роста (почти в  $(2 / (3\sqrt{3}))^n$  раз) скорости приближения функции  $e^z$  аппроксимациями Эрмита – Паде из следствия 3.4.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mahler, K. Perfect systems / K. Mahler // Comp. Math. – 1968. – V. 19. – P. 95–166.
2. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris) – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
3. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1 / Ф. Клейн. – М.: Наука, 1933.
4. Hermite, C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A – 1883. – Vol. 21. – P. 289–308.
5. Mahler, K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1931. – Vol. 166. – P. 118–150.

6. *Padé, H.* Memoire sur les developpements en fractions continues de la fonctial exponential // Ann. École Norm. Sup. Paris. – 1899. – Vol. 16. № 3. – P. 394–426.
7. *Aptekarev, A.I.* Asymptotics of Hermite-Padé polynomials, in “Progress in Approximation Theory” (A.A. Gonchar and E.B. Saff, Eds.) – P. 127–167 / A.I. Aptekarev, H. Stahl. – New York / Berlin : Springer-Verlag, 1992.
8. *Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены* / А.И. Аптекарев [и др.] // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 37–122.
9. *Mahler, K.* Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms / K. Mahler // Math. Ann. – 1967. – Vol. 1668. – P. 200–227.
10. *Chudnovsky, G.V.* Hermite-Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of  $\pi$ , in “Lecture Notes in Math” / G.V. Chudnovsky. – New York / Berlin : Springer-Verlag. – 1982. – Vol. 925. – P. 299–322.
11. *Аптекарев, А.И.* Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения / А.И. Аптекарев // Сборник статей. Совр. пробл. матем / А.И. Аптекарев (ред.). – М. : МИАН. – 1988. – Т. 9. – С. 1–71.
12. *Калягин, В.А.* Аппроксимации Эрмита – Паде и спектральный анализ несимметричных операторов / В.А. Калягин // Матем. сборник. – 1994. – Т. 185, № 6. – С. 79–100.
13. *Суетин, С.П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1 – С. 45–142.
14. *Borwein, P.B.* Quadratic Hermite – Padé approximation to the exponential function / P.B. Borwein // Const. Approx. – 1986. – Vol. 62. – P. 291–302.
15. *Wielonsky, F.* Asymptotics of Diagonal Hermite – Padé Approximants to  $e^z$  / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, № 2. – P. 283–298.
16. *Аптекарев, А.И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.
17. *Старовойтов, А.П.* Асимптотика эрмитовой аппроксимации экспонент / А.П. Старовойтов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. – 2012. – № 5 (74). – С. 163–171.
18. *Старовойтов, А.П.* Аппроксимации Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 81–87.
19. *Сидоров, Ю.В.* Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М. : Наука, 1989.
20. *Маркушевич, А.И.* Теория аналитических функций. Том 1 / А.И. Маркушевич. – М. : Наука, 1967.

Поступила в редакцию 29.01.14.